Таблица простейших интегралов

1.$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$

2.$\int dx = x + C$

3.$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

4.$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

5.$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$

6.$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$

7.$\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

9.$\int sinx\, dx = -cosx + C$

10. $\int \cos x\, dx = sinx + C$

11.$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx + C$

12. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctgx + C$

13.$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$

14. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

16. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C = -\int \frac{dx}{x^2-1}$

17.$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

18.$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

- **Интегрирование путем замены переменной**

Один из наиболее распространенных методов, применяемых при вычислении неопределенных интегралов, метод замены переменных.

Если известно, что $\int f(t)dt = F(t) + C$, то

$\int f\big(u(x)\big) \frac{du}{dx}\ (x)dx = F\big(u(x)\big) + C$ где f(t), u(x), $\frac{du}{dx}$ – непрерывны.

Способ подстановки состоит в том, что сообразно виду подынтегральной функции составляют вспомогательную функцию, подстановка которой в исходный интеграл приводит его к виду более удобному для интегрирования.

Рассмотрим примеры, уже решенные ранее:

Пример 1

$$\int \sqrt{2x-5}dx = \left\{\begin{matrix} 2x-5=t & & x=\frac{t+5}{2} \\ 2x=t+5 & dx=\frac{1}{2}d(t+5)=\frac{1}{2}dt & \end{matrix}\right\} = \sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}dt =$$

$$\frac{1}{2}\int t^{1/2}\cdot dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t^{3/2} = \frac{1}{3}(2x-5)^{3/2} + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \left\{\begin{matrix} x^2+3=t & d(x^2)=d(t-3) \;\; xdx=\frac{1}{2}dt \\ x^2=t-3 & 2xdx=dt \end{matrix}\right\} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} =$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}ln|t| = \frac{1}{2}ln|x^2+3| + \text{C}.$$

Пример 3

$$\int sin^2x\cdot cosx\,dx = \left\{\begin{matrix} sinx=t \\ d(sinx)=dt \\ \cos xdx=dt \end{matrix}\right\} = \int t^2dt = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}sin^3x + \text{C}.$$

Пример 4

$$\int \frac{\sqrt[3]{arcsinx}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left\{\begin{matrix} arcsinx=t \\ d(arcsinx)=dt \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=dt \end{matrix}\right\} \int \sqrt[3]{t}\,dt = \int t^{1/3}\,dt = \frac{3}{4}t^{4/3} =$$

$$\frac{3}{4}(arcsinx)^{4/3} + C.$$

Пример 5

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(4+\sqrt[3]{x})}$$

В этом случае используется $x = t^6$, получим

$$\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = d(t^6) = 6t^5dt$$

и $\int \frac{6t^5dt}{t^3(4+t^2)} = 6\int \frac{t^2\,dt}{4+t^2} = 6\int \frac{(t^2+4)-4}{t^2+4}dt = \int 6\,dt - 24\int \frac{dt}{t^2+4} = 6t -$

$12arctg\frac{t}{2} + C = 6\sqrt[6]{x} + +12arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$

Пример 6

Использование универсальной тригонометрической подстановки

$$t = tg\frac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$$

$$sinx = \frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$cosx = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctg\,t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos 3x + 2sin3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{cos3x+2sin3x} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{cosz+2sinz} = \frac{1}{3}\int \frac{2\,dt}{(1+t^2)(\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2})} =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1-t^2+4t} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{5-(t-2)^2} = \frac{2}{3}\int \frac{du}{5-u^2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sqrt{5}}ln\left|\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right| + C =$$

$$\frac{1}{3\sqrt{5}}ln\left|\frac{tg\frac{3x}{2}-2+\sqrt{5}}{tg\frac{3x}{2}-2-\sqrt{5}}\right| + \text{C}.$$

- ***Интегрирование по частям***

Пусть $U(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, тогда $\int udv = u\cdot v - \int vdu$ или $\int u\cdot v'dx = u\cdot v - \int v\cdot u'dx$

Пример 7

$\int x\cdot e^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{x}\end{matrix}\right\} = -x\cdot e^{-x} - \int(-e^{-x})dx =$

$x\cdot e^{-x} - e^{-x} + \text{C}.$

Пример 8

$\int x^2 \cos x\, dx = \begin{Bmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = cosx\,dx & v = -sinx \end{Bmatrix} = -x^2 sinx -$
$\int 2x\,(-sinx)dx.$

Рассмотрим получившийся интеграл

$$2\int x \sin x\, dx = \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = sinxdx & v = -cosx \end{Bmatrix}$$
$$= -2x\,cosx - \int (-cosx)dx = -2xcosx + sinx$$

Ответ: $-x^2 sinx - 2xcosx + sinx + C.$

Замечания.

Метод интегрирования по частям применяется при интегрировании следующих видов функций. $P_m(x) \cdot sin(ax)$; $P_m(x) \cos ax$; $P_m(x) \cdot e^{ax}$; $P_m(x) arctg(ax)$; $P_m(x) arcsin(ax)$; $P_m(x) arccos(ax)$; $P_m(x) \cdot ln(ax)$.

1. При интегрировании функций вида $e^{ax} sinbx$; $e^{ax} cosbx$ интегрирование по частям применяется 2 раза, что приводит к решению уравнения для получения конечного ответа.

Пример 9

$\int e^x \cos x\, dx = \int \cos x\, de^x = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx = e^x \cos x +$
$+\int \sin x\, de^x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x cos\,x\,dx.$

Пусть $I = \int e^x \cos x\, dx.$

Тогда последнее равенство может быть переписано в виде

$I = e^x \cos x + e^x \sin x - I.$

Получим уравнение

$2I = e^x (cosx + sinx)$

Отсюда

$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2} (\cos x + s\,in\,x) + C.$

2. Метод интегрирования по частям может быть использован при интегрировании функций $\sqrt{ax^2+b}$, тогда $U=\sqrt{ax^2+b},\ dv=dx.$

Пример 10

$J=\int\sqrt{7-x^2}dx=\left\{\begin{matrix} u=\sqrt{7-x^2} & du=\frac{1}{2\sqrt{7-x^2}}(-2x)dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right\}\to x\cdot$ $\sqrt{7-x^2}-\int\frac{(-2x)\cdot x}{2\sqrt{7-x^2}}dx.$

Рассмотрим получившийся интеграл.

$\int\frac{-x^2}{\sqrt{7-x^2}}dx=\int\frac{(7-x^2)-7}{\sqrt{7-x^2}}dx=\int\sqrt{7-x^2}\,dx-7\quad\int\frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}=J-7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$

Имеем: $J=x\sqrt{7-x^2}-J+7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}$ уравнение относительно J.

$2J=x\sqrt{7-x^2}+7\arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}.$

Ответ:

$J=\int\sqrt{7-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{7-x^2}+7arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+C.$

Пример 10 может быть решен методом замены.

Пусть $x=\sqrt{7}\cdot\sin t$, тогда $7-(\sqrt{7}\sin t)^2=7-7sin^2t=7(1-sin^2t)=7\cdot cos^2t\to\sqrt{7cos^2t}=\sqrt{7}\cdot\cos t.$

$dx=\sqrt{7}\cos t\,dt.$

$\mathrm{J}=\int\sqrt{7}\cos \mathrm{t}\cdot\sqrt{7}\cos \mathrm{t\,dt}=7\int\cos^2\mathrm{t\,dt}=\frac{7}{2}\int 2\cos^2\mathrm{t\,dt}=\frac{7}{2}\int(1+\cos 2\mathrm{t})\,\mathrm{dt}=\frac{7}{2}\left(\mathrm{t}+\frac{\sin 2\mathrm{t}}{2}\right)=\frac{7}{2}\left[\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{7}}+\frac{1}{2}\sin 2(\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{7}})\right]+\mathrm{C}.$

При вычислении одного и того же интеграла разными методами могут получаться отличные друг от друга ответы. Здесь имеем две функции $F(x)=$

$\frac{1}{2}x\sqrt{7-x^2}+\frac{7}{2}arctg\ \frac{x}{\sqrt{7}}+C$ и $g(x)=\frac{7}{2}\arcsin\frac{x}{7}+\frac{7}{4}\sin 2(arcsin\frac{x}{\sqrt{7}})+C.$
Однако $F^{/}(x)=g^{/}(x)=\sqrt{7-x^2}$.

3. Необходимо иметь в виду, что применение метода интегрирования по частям приводит к частичному интегрированию, т.к. правая часть формулы (1) содержит интеграл. Но при правильном применении метода этот интеграл получается табличным или просто приводящимся к табличному.

Если в результате применения метода интегрирования по частям в правой части получается интеграл сложнее исходного, необходимо заново применить этот метод, разбив подынтегральное выражение на другие два множителя U и dV, из которых первый дифференцируется, а второй интегрируется при переходе к интегралу в правой части.

Умения правильного использования этого метода приобретаются только в результате упражнений.

➢ ***Интегрирование дробно-рациональных выражений***

1. $\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})}=$

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{q+\frac{p^2}{4}}\ arctg\ \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{2}}},\ q-\frac{p^2}{2}>0.\\ \frac{1}{2\sqrt{p^2/_2-q}}\cdot\ln\frac{x+p/_2-\sqrt{p^2/_2-q}}{x-p/_2+\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}},\ q-\frac{p^2}{2}<0.\end{array}\right\}\to x^2+px+q=x^2+\frac{2p}{2}\cdot 1+$$

$(\frac{p}{2})^2-\frac{p^2}{4}+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$.

2. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ $\quad x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)+(q-\frac{p^2}{4})$, причем, как предполагалось выше, $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Обозначим: $a\coloneqq\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Сделаем замену переменных

$z = x + \frac{p}{2}, \;\; dz = dx \;\; ,x^2 + px + q = z^2 + a^2,$

$Ax + B = A\left(z - \frac{p}{2}\right) + B = Az + (B - \frac{p \cdot A}{2}).$

Имеем:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Az+(B-\frac{pA}{2})}{z^2+a^2} dz = \frac{A}{2}\int \frac{2z\,dz}{z^2+a^2} + (B - \frac{pA}{2})\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln(z^2 + a^2) +$$

$$+\frac{1}{a}\cdot\left(B - \frac{pA}{2}\right) arctg\ \frac{z}{a} + C = \frac{A}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2B-p\cdot A}{\sqrt{4q-p^2}} arctg\ \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

3. Пусть $\frac{P_m(x)}{Q_m(x)}$ правильная дробь, т.е. m < n. Рассмотрим упрощенный вариант разложения многочлена на множители (полные способы разложения здесь не рассматриваются)

$Q_n(x) = (x-a)(x-b)^2 \cdot (x^2 + px + q)$, т.е. n=5;

Тогда

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)(x-b)^2(x^2+px+q)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C_x+D}{x^2+px+q}.$$

Найдя коэффициенты A,B,C и D, мы придем к вычислению трех уже известных интегралов

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{(x-b)^2} + \int \frac{C_x+D}{x^2+px+q} dx.$$

Пример 11

$J = \int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1} dx.$

$\left.\begin{cases} P_m(x) = 2x^2 - 3x + 1 & m = 2. \\ Q_n(x) = x^3 + 1 & n = 3 \end{cases}\right\}$-> m < n дробь правильная.

$Q_3(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ –> разложили как сумму кубов

$$\frac{2x^2-3x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

$2x^2 - 3x + 1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1).$

Т.к $Q_3(x)$ имеет действительный корень $\mathrm{x} = -1$ $(\mathrm{x} + 1 = 0)$, то применим метод частных значений: подставим x=-1 в левую и правую часть разложения $Q_3(x)$

$2(-1)^2 - 3(-1) + 1 = A((-1)^2 - (-1) + 1) + (B(-1) + C)(-1 + 1).$

$6 = 3A -> \underline{A=2}.$

Других удобных значений X у нас нет. Применим метод сравнения коэффициентов при одинаковых степенях X в левой и правой частях.

$x^2 |\ 2 = A + B = 2 + B \rightarrow B = 0.$

$x^0 |\ 1 = A + C = 2 + C \rightarrow C = -1.$

Имеем

$J = \int \frac{2\,dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x^2-1+1} = 2\ln|x+1| - \int \frac{dx}{(x-{}^1/_2)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$= 2\ln|x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C.$$