Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Опр. 1. Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(x) = f(x) \qquad (1)$$

где a_k некоторые действительные числа, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$, то есть k −ая производная, $f(x)$ некоторая заданная функция.

Решить дифференциальное уравнение, значит найти такую функцию $y(x)$, которая, будучи подставленная в исходное уравнение, обратит его в верное равенство.

Опр. 2. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется однородным, в противном случае неоднородным.

Этапы решения линейного дифференциального уравнения вида (1).

1) Необходимо решить однородное дифференциальное уравнение.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

Из вида уравнения можно заметить, что некоторая линейная комбинация искомой функции и ее производных равна нулю, это значит, что при дифференцировании эта функция сохраняет свой вид. Такая функция нам известна – это экспонента. Будем искать решение в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ некоторое число (возможно, даже и комплексное!). Подставим $e^{\lambda x}$ в (2):

$$a_n \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \qquad (3)$$

Так как $e^{\lambda x}$ всюду не равно 0, то поделим на него уравнение (3), получим алгебраическое уравнение относительно λ:

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \qquad (4)$$

Опр. 3. Уравнение (4) называется характеристическим уравнением для данного дифференциального уравнения (2). Кстати, характеристическое уравнение можно составлять сразу «автоматом» для этого необходимо каждую производную k −ого порядка искомой функции в уравнении (2) заменить на λ^k. То есть

$$y^{(n)} \Rightarrow \lambda^n, \qquad y^{(n-1)} \Rightarrow \lambda^{n-1}, \qquad \dots, y'' \Rightarrow \lambda^2, \qquad y' \Rightarrow \lambda, \qquad y \Rightarrow \lambda^0 = 1$$

Замечание. При этом мы только лишь сопоставляем каждой производной соответствующую степень λ, неверно говорить о том, что, например, $y^{(n)} = \lambda^n$.

Из алгебры известно, что уравнение (4) имеет ровно n комплексных корней, пусть даже среди них не все различны. Найдя все корни уравнения (4), можно составить решение однородного уравнения.

Случай 1. Все корни различны, тогда решение однородного дифференциального уравнения дается формулой:

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x} \qquad (5),$$

Где C_k −произвольные постоянные, а λ_k −уже найденные корни характеристического уравнения (4).

Случай 2. Все корни различны, но среди них присутствуют и комплексные. Формула (5) остается справедливой, однако, появляются экспоненты с комплексными показателями. Для того чтобы получить действительные решения нужно воспользоваться формулой Эйлера:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Пример. Пусть $\lambda_1 = a + ib$ является корнем характеристического уравнения (Кстати, тогда и $a - ib$ тоже корень!). По формуле (5) имеем, что одним из решений уравнения (2) является функция $C_1 e^{\lambda_1 x} = C_1 e^{(a+ib)x}$, избавимся от комплексной степени: $C_1 e^{(a+ib)x} = C_1 e^{ax+ibx} = C_1 e^{ax} e^{ibx}$, а теперь воспользуемся формулой Эйлера.

$$C_1 e^{ax} e^{ibx} = C_1 e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) = C_1 e^{ax}\cos bx + iC_1 e^{ax}\sin bx$$

Так как и $a - ib$ тоже корень характеристического уравнения, то аналогично получим, что $C_2 e^{(a-ib)x}$ тоже одно из решений уравнения (2). Преобразуем его:

$$C_2 e^{(a-ib)x} = C_2 e^{ax} e^{-ibx}$$
$$= C_2 e^{ax} (\cos(-bx)$$
$$+ i \sin(-bx)) = C_2 e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) = C_2 e^{ax} \cos\ bx - i C_2 e^{ax} \sin\ bx$$

Так как и $C_1 e^{(a+ib)x}$ решение уравнения (2) и $C_2 e^{(a-ib)x}$ также является решением, то сумма этих функций тоже решение уравнения (2). Сложим эти функции:

$$C_1 e^{(a+ib)x} + C_2 e^{(a-ib)x} = C_1 e^{ax} \cos bx + i C_1 e^{ax} \sin bx + C_2 e^{ax} \cos bx - i C_2 e^{ax} \sin bx =$$

$$= e^{ax} \cos bx\,(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2) + e^{ax} \sin bx\,(iC_1 - iC_2)$$

Так как C_1и C_2 произвольные константы, то и $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2$ тоже произвольная константа. Аналогично и $iC_1 - iC_2$ тоже произвольная константа. Обозначим $C_1 + C_2 = C_1^*$, а $iC_1 - iC_2 = C_2^*$, тогда решение соответствующие корням $a + ib$ и $a - ib$ дается формулой:

$$C_1^* e^{ax} \cos bx + C_2^* e^{ax} \sin bx = e^{ax}\,(C_1^* \cos bx + C_2^* \sin bx)$$

Случай 3. Среди корней характеристического уравнения присутствуют одинаковые (кратные) корни. Тогда решение однородного дифференциального уравнения (2) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_k e^{\lambda_k x}$ для каждого простого корня λ_k уравнения (4) и слагаемых вида $P_{q-1}(x) e^{\lambda x}$, для каждого кратного корня λ уравнения (4), где q кратность корня, а $P_{q-1}(x)$ многочлен степени $q - 1$ с произвольными коэффициентами.

Пример. Положим найдено, что $\lambda = 2$ корень характеристического уравнения, причем его кратность равна $q = 3$, тогда решение соответствующие этому корню дается формулой:

$$P_{q-1}(x) e^{\lambda x} = P_2(x) e^{2x} = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\, e^{2x}$$

Где C_1, C_2, C_3 —произвольные постоянные.

Замечание. Решение уравнения (2) зависит от n произвольных постоянных.

2) Решаем неоднородное уравнение, то есть ищем частные решения уравнения (1). К этому моменту уже решено однородное дифференциальное уравнение и найдены корни характеристического уравнения.

Определение частных решений намного сложнее поиска решений однородного уравнения. В общем случае для их определения необходимо проводить метод вариации постоянных, при котором необходимо будет вычислять интегралы, а, как известно не все элементарные функции интегрируются в конечном виде, конечно же, это не означает, что не существует решения дифференциального уравнения. Рассмотрим, как искать частное решение при правой части специального вида, т.е. когда $f(x)$ имеет некоторый вид (предположим, что $f(x)$ представляет собой квазимногочлен).

Случай 1. Пусть $f(x) = P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) -$ многочлен степени m, с заданными коэффициентами, тогда частное имеет вид

$$y_ч = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$$

где $Q_m(x) -$ многочлен той же степени m, но с еще пока неопределенными коэффициентами. Число $s = 0$, если $\gamma -$ не корень характеристического уравнения (4), а если $\gamma -$ корень, то s равно кратности этого корня. Чтобы найти коэффициенты многочлена $Q_m(x)$, надо $y_ч$ подставить в исходное уравнение (1) и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Случай 2. Пусть $f(x) = e^{ax}(P_k(x)\cos bx + Q_l(x)\sin bx)$, где $P_k(x), Q_l(x) -$ известные многочлены степени k и l соответственно. Тогда частное решение следует искать в виде

$$y_ч = x^s e^{ax}(R_m(x)\cos bx + T_m(x)\sin bx)$$

Составим число γ по виду правой части: $\gamma = a + ib$. Тогда $s = 0$, если $\gamma -$ не корень характеристического уравнения (4) и s равно кратности корня γ в противном случае, а $R_m(x)$ и $T_m(x) -$ многочлены с пока еще не определенными коэффициентами степени

$m = \max(k, l)$ (то есть степень многочленов $R_m(x)$ и $T_m(x)$ равна наибольшей из степеней многочленов $P_k(x)$ и $Q_l(x)$). Чтобы найти эти коэффициенты надо подставить $y_ч$ в исходное дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Случай 3. Если правая часть уравнения (1) представляет собой сумму функций имеющих вид как в предыдущих двух случаях, то есть $f(x) = f_1 + f_2 + \cdots + f_p$, то частное решение равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \dots, f_p$. Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего решения однородного уравнения с той же правой частью.

Пример.

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cos^2 x$$

В начале решим однородное уравнение:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

Его корни: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. Значит решение однородного уравнения (случай 1)

$$y_{одн.} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

Найдем решение неоднородного уравнения. Для этого представим правую часть в виде суммы функции:

$$e^{-x}\cos^2 x = e^{-x}\frac{(1 + \cos 2x)}{2} = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$$

Так как исходное дифференциальное уравнение является линейным, то, если мы имеем два различных решения, то их сумма так же будет решением.

Разобьем решение неоднородного уравнения на две вспомогательные задачи:

$$i)\ y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2} \qquad\qquad ii)\ y'' + 3y' + 2y = \frac{\cos 2x}{2}$$

Найдем решение для уравнения i)

В данном случае функция справа представляет собой экспоненту, которая умножается на многочлен нулевой степени (на константу ½). Получаем случай 1 для правой части (стр. 3). Коэффициент при x в показателе экспоненты равен -1. Так же -1 является корнем характеристического уравнения кратности 1. Поэтому

$$y_{\text{част}} = x^1 A e^{-x} = A x e^{-x}$$

Для определения неизвестной A подставим $y_{\text{част}}$ в уравнение i)

$$(-2Ae^{-x} + Axe^{-x}) + 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) + 2Axe^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получаем условие на A:

$$Ae^{-x} = \frac{e^{-x}}{2}$$

Откуда $A = \frac{1}{2}$, то есть $y_{\text{част}} = \frac{1}{2}xe^{-x}$.

Далее, найдем частное решение уравнения ii):

По виду правой части находим, что $\gamma = 2i$ (случай 2 стр. 4), данное число не является корнем характеристического уравнения. Значит решение будем искать в виде $y_{\text{част}} = A\cos 2x + B\sin 2x$. Для определения фактических значений параметров A и B подставим эту функцию в уравнение ii)

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) + 3(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) + 2(A\cos 2x + B\sin 2x) = \frac{\cos 2x}{2}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\cos 2x\,(-2A + 6B) + \sin 2x\,(-6A - 2B) = \frac{1}{2}\cos 2x$$

Необходимо подобрать значения переменных таким образом, чтобы левая часть равнялась правой. Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} -2A + 6B = \dfrac{1}{2} \\ -6A - 2B = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем

$$\begin{cases} A = -\dfrac{1}{40} \\ B = \dfrac{3}{40} \end{cases}.$$

То есть $y_{\text{част}} = \frac{1}{40}(-\cos 2x + 3\sin 2x)$.

Собирая все вместе, можем выписать общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2} x e^{-x} + \frac{1}{40}(-\cos 2x + 3\sin 2x).$$